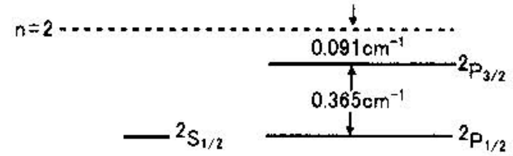
コラム　第二論文の背景：Lamb Shiftとその理論計算　Schweber 5章，6章

ボーア(N. Bohr)の理論によると，水素原子内の電子のエネルギー準位は$E_n = -Z^2hcR/n^2$，とその主量子数nだけに依存するはずですが，実際には微細にずれていて，それは，Diracの電子理論によると図のようになるはずです．



Diracの理論によれば，$2S_{1/2}$と$2P_{1/2}$のエネルギー準位に差はないはずでした．ところが1947年ラム(W. Lamb) とラザフォード(R. Retherford)は巧妙な実験によって$S_{1/2}$と$P_{1/2}$の間に約1000 MHzのエネルギー差 (Lamb Shift) があることを発見しました (その後，測定の精度が上がりLamb Shiftは1050 MHzであることが確定しています)．

1947年7月，戦後初めての理論物理学者の集まりが米国ロングアイランドのシェルター島で開かれましたが，そこで一番の話題になったのがLamb Shiftでした．原理的で厳密なDiracの理論に誤りがあるはずはないので，それならShiftを起こす原因は何かです．誰もがそれは放射場が電子に干渉して生じる電子の「自己エネルギー」が原因だろうと考えました．自己エネルギーの「場の量子論」的計算はすでに1939年Dancoffにより試みられましたが，結果は無限大になるので無視する習慣になっていました．ところが今度は無限大にならない自己エネルギー計算法が真剣に求められることになりました．これに対しBetheは対処の基本的考えをその場で発表し，その直後，それによる理論公式と具体的計算結果を得て，関係者に知らせています．*Phys.Rev.*誌にもすぐ論文として発表されました．ここでBetheの考えと理論計算の内容は，あとに発表された朝永の「くり込み理論」と「南部論文」のオリジナリティーを判断する上で必須ですので，少し丁寧に紹介しましょう．

まずBetheの基本的な考えの主張とは，自己エネルギーの計算で発散する項の中には，線形で発散する項と対数で発散する項の2種あるが，線形発散項は全部消去し，考慮しなくてよいというものです．その理由は，モーメンタムp_0の自由粒子の自己エネルギーΔWは (1)式のように線形発散項になるが，このエネルギーは質量に変換されているとして追加質量でΔmを求めると (2)式になる．そしてΔmは常に ($m_0 + \Delta m$) という形で式の中に入っていることに注目します．ここでm_0は理論上考えられる「はだか」の質量で，これは知りえないもので，観測される質量は常に$m = m_0 + \Delta m$だから，mを使うかぎり (2)式のΔmは無視してよいという主張です．

$$\Delta W = -\frac{e^2}{\hbar c}\left(\frac{p_0}{mc}\right)^2 \frac{2}{3\pi}\int_0^{\infty} dk \qquad (1)$$

$$\Delta m = -\frac{2m_0^2}{p^2}\Delta W \qquad (2)$$

$$W = -\frac{2e^2}{3\pi\hbar c^3}\int_0^{k} kdk \sum_n \frac{|v_{nm}|^2}{E_n - E_m + k'} \qquad (3)$$

$$W_0 = -\frac{2e^2}{3\pi\hbar c^3}\int kdkv^2/k \qquad (4)$$

すると自己エネルギーとして残るのは (3)式で表されるWです．このままでは発散積分ですが，発散をとめてLamb Shiftの数値を得るためにBetheは二つの処置を取っています．一つは積分の上限の設定です．この積分でkは電子が放出し吸収するphotonのエネルギーですが，Betheはその上限を$k = mc^2$としています．これで積分は有界になりました．でもこれだけではWがLamb Shiftにならないというのが Betheの第2の主張です．(3)式のWの総和を$n = m$の1項だけにしたW_0 ((4)式) をWから引いて，$W' = W - W_0$ ((5) 式) にする必要があるというのです．W_0はほかの状態と干渉のない自由な電子の「自己エネルギー」ですが，これはphotonとの干渉で電子に追加された質量に相当する項なので，電子質量として観測値を使うときは，これはすでにWに入っているので差引かなければならないというのがBetheの考えです．

こうしてBetheはLamb Shiftを求める基本的考えを発表したあと，シェルター島から帰る列車の中で理論計算を行い，(6)式の結果を得てノートに記しています．アルバイト先のゼネラルエレクトリック (GE) 社で，エネルギー準位差の平均値 $\langle E_n - E_m \rangle_{av}$を数値計算してもらい，これを使ってLamb Shiftの値1040 MHzを得ています．

シェルター島でBetheの基本的考え方を聴き，その直後，計算結果を知った一人にシュウィンガー (J. S. Schwinger) がいました．誰一人かなう者がないといわれた理論計算の天才です．Betheの計算を見て，Schwingerが一点，不満に思ったのは積分の上限を決める$k = mc^2$の仮定です．恣意的に思えました．そしてこれは相対論を考慮してないために必要になった導入で，相対論的に理論を組立てれば，その必要はないはずと考え，理論構築を始めました．朝永とまったく同じ着眼点です．そしてBetheの考えの相対論的な書き換えに成功しました．それは(3)式や(5)式のようにエネルギーkについての積分ではなく，photonの周波数ωに関する積分で表わされています．この場合でも収束解を得るためには，積分の上限値ω_1を指定せねばなりません．ω_1を決めるため，Schwingerは「最小長さ」aを用いて$\omega_1 = 2\pi c/a$としました．このω_1を用いるとLamb Shiftの値は(7)式の$\langle H \rangle$のようになります．これは$h\omega_1 = mc^2$ならばBetheの結果と一致します．つまり，積分限界を$k = mc^2$とすることの妥当性が，認められたことになります．

$$W' = W - W_0 = \frac{2e^2}{3\pi\hbar c^3}\int_0^{k} dk \sum_n \frac{|v_{nm}|^2 (E_n - E_m)}{E_n - E_m + k'} \qquad (5)$$

$$W_n' = \frac{8}{3\pi}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right) Ry \frac{Z^4}{n^3} \ln \frac{K}{< E_n - E_m >_{av}{}'} \qquad (6)$$

$$< H > = \frac{8}{3\pi} a'^3 \frac{Z^4}{n^3} \ln \frac{h\omega_1}{\Delta E'} \qquad (7)$$