

自由人物理

波動論 量子力学 原論

西村肇(東京大学名誉教授)

増補附録

「スピンとは何か —電子の自転はウソー—」

1. なぜいつまでも
2. Dirac の決定打 なぜ相対論なのか
3. Dirac 理論への必須入口が Pauli 理論
4. スピン性とは何か
5. 座標軸の回転と角運動量
6. 複素数波動関数を表現する新モデル

スピンとは何か —電子の自転はウソ—

1. なぜいつまでも

「スピンとは何か」という本格的解説文を増補として加えます。理由は本篇「自由人物理」そのものが「スピンとは何か」という多くの人の疑問質問に答えるものでしたが、著述の性質上、相当に膨大なものになってしまい、質問に対する解答としては別の項が必要と考えたためです。そう強く考えた理由は物理、化学の専門家を含め、スピンについて現在の学問的レベルから見て正確で、しかも予備知識なしでも理解できるような解説論文が一篇もないことです。勿論スピンについて書かれた論文や著書は驚くほど沢山あります。それが化学者を含め物理専門家でない人々のスピンに関する常識を形成していますが、それは大ざっぱに言えば、原子内の電子の状態については、Schrödingerの方程式から導かれる 3 つの量子数（動径量子数 k ，方位量子数 l ，磁気量子数 M ）では表現できない自由度があり、それがスピン量子数ですが、それは電子が軌道角運動量なしに作る intrinsic（本格的）な磁気能率に関係し、それには上向き \uparrow と下向き \downarrow がある。そのような本格的な磁気能率が発生する物理的原因は電子の自転である、というのが少なくともスピンを理解していると思っている全ての人々が間違いない知識と信じている常識です。そしてその常識を振りまき、確固たるものにしてるのが、人々が容易に読める解説や著書です。

今回私が解説「電子とは何か」を書く理由は、この常識が間違っており、正さなければならないと考えるからです。何が間違っているか、

大きさもなく構造もない電子がこまの様に自転することで、軌道角運動量ではない本来角運動量と本来磁気能率を生じるという点です。ただこの一点に関し私のように疑義を抱いた人はごく少数で、専門家を含め圧倒的多数の人は、Uhlenbeck と Goudsmith が提案した電子が自転することにより、今まで知られていなかった磁気能率を生ずるという大胆な提案を歓迎し、その信奉者となりました。ノーベル賞はもらわなかったのですが、二人の提案はその根拠となった実験結果が十分に印象的であり、謎解きとして出された彼らの提案がなるほどと思わせながら分かりやすいものだったからです。

しかし長い謎解き競争の最後に出された Dirac の答えは、完璧なまでに電子自転説を否定しました。ところが自転説はそれを完全に無視することで、その後 100 年生き残っています。その理由の一つは Dirac 理論の難解さですが、もっと根本的な理由は、粒子派と波動論派の対立、Bohr, Heisenberg 派と、de Broglie, Schrödinger の対立にあると私は見ます。もっと根本的には量子力学の基礎を分光学的、観測結果の解釈に置くのが、Mendeleev の周期律表に現われた多電子系の周期構造の解釈に置くのがあります。粒子派は電子という粒子の実体性に固執しますから、その運動形態としての自転から逃れられないのだと思います。実際、スピン現象の学問的正しい理解に必須なポイントが 2 項目ありますが、そのいずれも波動論が発見したものです。その第一は波動力学の相対論的結論であり、まさに波動力学そのものです。第二はスピンに関する Pauli 行列理論です。これは Bohr, Heisenberg と共に強固な粒子論者であった Pauli が、この問題解決のために波動力学に移り達成した貴重な成果です。このような事情のためか、本質

2 点をおさえたスピンに関する正しい解説書で他を先導したのは、Dirac の『量子力学原論』, Kompaneys の『理論物理学』, Corinaldesi の『相対論波動力学』, Taketani と Nagasaki の『量子力学の形成と論理』の四書です。いずれも波動力学の立場です。これに較べて Bohr との関係が強かった Landau と Tomonaga の『量子力学』は、電子自転論を否定することにはなっていません。Feynman の量子力学は著書の 1/4 をスピンにあてながら、正しい答を示すことを目的にせず、それを教えることを拒否しています。

書籍がそういう状況なら、それを 10 頁程度で行なう解説論文などなくても当然です。でもそれをあえてやろうとするなら考えなくてはならない。そこで考えたのは叙述の順序です。常識のように理論では予想できなかつた不思議な現象の発見から始めて、その謎解きに挑んだ何人ももの巨人の話と進んだら、本になってしまい、論文ではおさまりません。そこで考えたのが、順序を逆にすることです。最初にほとんど誰も意味はわからないが、学問的に正確な解説正文を示します。次に意味がわかるような解説でします。ここで Pauli の行列が具体的に示されます。すると次の段階はスピンのどのような特性が Pauli 行列を生んだかで、スピンの運動状態ではなく、波動関数に作用するオペレーターであることを示します。そして固有値は上向き \uparrow か下向き \downarrow が 2 値しか持たぬこと、そうなる根拠としては、異常 Zeeman 効果では 3 本への分裂ではなく、2 本への分裂が起りますが、これに対してはスピン量子数として半整数を考えた Lande の考えが紹介されます。つまり結論に昇って行く道より、結論から見降した方が論理の見通しが良いので、この方法で行きます。

2. Dirac の決定打 なぜ相対論なのか

最初に学術的には一番権威があると思われる物理学辞典（培風館）のスピンの項を見て見ます。字数 800 字と少ないのですが、その内容を項目別にして列記すると、1) スピンとは軌道角運動量とは区別される粒子の固有角運動量である。2) スピンとスピン角運動量は同義。3) スピンの大きさは $s\hbar$ 。4) この s をふつつ粒子のスピンと呼ぶ。電子のスピンは $1/2$ 。5) スピン s の粒子は $2s+1$ のスピン状態を持つ。これは空間的運動とは別の内部自由度。6) 光子も 2 つのスピン状態（左右の円偏光）しか持たない。7) スピンは質量と共に粒子の最も基本的特質である。（以上）

これは粒子としては電子だけでなく、光子、ニュートリノまで含めたスピンの解説で、権威ある人の作と思われます。注目すべき点は、スピンを電子の自転とする説を完全に無視・否定していることです。少し注意したいのは、固有角運動量の「固有」という日本語訳です。これは英語では *intrinsic*、ロシア語だと *sobctvenni* で、「本来」という意味であり、そう訳すべきです。スピンの質量と共に物質の最も基本的な特質という結言も注目に値します。しかもそれが一般相対性理論からの結論の一つというのも重みがあります。とにかくスピンを電子の自転とする考え方は誤りとする考え方は、理論物理学の間では常識のようです。それに代わって電子のスピンを光の円偏光と類似させる考え方が出ています。これは *de Broglie* の考え方でもありました。

スピンに関する決定的結論の第一は従来、軌道角運動量によらない固有角運動量は電子の自転（スピン）によるとされていた説は間違い

で、これは電子の運動を相対論的に解析すると現れる本来的角運動量であるという Dirac による画期的な数学的証明です。これについては、本書 327 頁「スピンとは本当は何か Dirac の電子論」で証明の道筋と主要途中結果式を丁寧に示した通りです。そして最後の所だけ再掲すると、

.....

最後は H_z が出てきましたが、これは $\mathbf{rot} \mathbf{A} = \mathbf{H}$ という公式に従ったままです。

従って上式は、

$$(\mathcal{E}' - e\varphi) \psi_P = \left[\frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{P}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{eh}{mc} (\hat{\sigma}_x H_x + \hat{\sigma}_y H_y + \hat{\sigma}_z H_z) \right] \psi_P \text{ です。}$$

ベクトル式で書くと、

$$\mathcal{E}' \psi_P = \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{P}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi_P + e\varphi \psi_P - \frac{eh}{mc} \frac{eh}{mc} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{H}) \psi_P \text{ です。}$$

上式は波動力学の出発点となる Hamilton 方程式です。電荷のある粒子について普通の方法で作れば、

$$\mathcal{E}' \psi = \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{P}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi + e\varphi \psi \text{ です。それが Schrödinger 方程式です。}$$

ところが Dirac の方法でやると、Hamiltonian に

$$\hat{\mathcal{H}}_\sigma = -\frac{eh}{mc} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{H}) = -S (\hat{\boldsymbol{\mu}}_\sigma \cdot \mathbf{H}) \text{ が加わります。}$$

これは電子に $\hat{\boldsymbol{\mu}}_\sigma = \frac{eh}{mc} \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ の磁気モーメントが加わったことを意味し

ます。**Schrödinger** になかったこの追加項は Dirac が「こま」の旋廻を考慮して持ち込んだものではありません。Schrödinger 方程式を厳密に相対論化するという Dirac の方法が隠れていたものを発見したのです。

.....

電子のスピンとは電子の自転と当たり前のように思っているほとんど全部の化学者と理論物理以外の物理学者の頭を完全にゆるがしてしまう重大結論です。この結論が書籍として公刊されたのは 1930 年です。ところが不思議なのは、それからおよそ 100 年経っているのに電子自転説の誤りは一向に正されることなく量子力学の一番重要な常識として生き残っていることです。その主な原因は、Dirac の理論が理論物理専門家以外は決して理解できないほど難解であるということでしょうが、理解できた多数の専門家の中で、上に挙げた 4 人以外では誰一人この結果を積極的に支持・宣伝しなかったことは事実です。大物中の大物である Bohr, Heisenberg, Pauli, Landau がそうでした。すべて波動論に対立する粒子派あるいは Bohr と親交のある人々です。粒子派にとっては学問的に根本的に対立している波動論による大成果なので、次の問題である「場の量子論」に注意を集中するなかで、スピンはもう終わった問題として一斉に無視に出たと思います。そうであるなら、スピン自転論の常識が崩れる筈はありません。

それにしても不思議なのは、相対論を使うと見えなかったものが見えるようになるという点です。具体的には、軌道角運動量のない s 状態の電子について、相対論を使って解析すると上向き \uparrow と下向き \downarrow の角運動量が現われるという点です。数学派は数式の物理的理由を問うことはしませんが、物理派はそれを行ないます。超難解な Dirac 理論

の意味が急に納得できるようになる筈だからです。そうすればスピンの名で呼ばれている電子の本来角運動量と磁気能率の原因について Dirac の正しい結論が多くの人の頭に入り、自転の間違いが正されるようになると思うからです。

私は物理派、波動論派として、Dirac 理論の物理的意味を次のように解釈しています。まず相対論的波動方程式と非相対論的波動方程式、つまり Schrödinger 波動方程式の違いですが、電子と核の系で Schrödinger 力学では核の位置における波動関数値をゼロと置きます。電子は核の位置には存在しないからです。と同時に核近傍の電子の速度も無視します。しかしこの常識と思込みは、 s 波動 (s 軌道) には通用しません。力学的には s 波動は直線で必ず核を通らなければならない、核を通りながら核 (+) と電子 (-) が合体しないためには光速に近い速度で通過しなければならないからです。結局、非相対論的には核の中心を通過して、しかし相対論的には核の超近傍を超高速で通り抜けることとなります。その結果、非相対論的には角運動量なしでも、相対論的には角運動量があることとなります。これが本来角運動量です。しかも本来角運動量は通過する電子が核を右に見るか左に見るか、上向きと下向きが同数発生することとなります。

3. Dirac 理論への必須入口が Pauli 理論

スピンについて本格的に考えるのに必要な基礎事項は二つある。その第一は Dirac 論であると言いましたが、第二は本篇ですでに紹介した Pauli 理論です。磁場を弱くした異常 Zeeman 効果の状態では、水

素のs波動電子は3本線でなく2本線に分裂します。これは電子が上向き↑と下向き↓の磁気能率を持ったことを意味しますが、その原因として Uhlenbeck と Goudsmith が電子の自転を考えた時、粒子派の物理学者たちは他に考えられる原因がないままにみんな単純にそれを受け入れました。これに対し波動派の物理学者は軌道角運動量の無い電子の磁気能率の発生の物理的原因を考えるのではなく、波動力学の論理と体系の中でこの現象がどう理論づけられるかを考えようと思いました。そしてこれに成功したのが Charles Darwin の孫の Darwin でした。そのあと同じことをやって確固たる成功をしたのが粒子派の大物 Pauli でした。波動力学派に豹変しての大成功でした。

以下、本篇の結論の部分だけ引用します。

次に 1927 年に出た Pauli の原論文に従って具体的に Pauli の定式化を見て行きます。まず 2 本のスペクトルから導かれることです。作用量が h より小さく、しかも 2 本の間で光の放射を行なうことからこの現象の波動関数 ψ は、スカラーではなく、固有値が $(1/2)h$ と $-(1/2)h$ である 2 つの波動関数 ψ_+ と ψ_- を成分とするベクトルであることを示しています。ベクトルを横ベクトルで表せばこの現象の波動関数は $\psi = (\psi_+, \psi_-)$ です。

次はスピン s というベクトル物理量に対応する Operator (波動関数 ψ への操作量) を定式化することです。対象となる波動関数が 2 次元ベクトルですから、旋廻操作量 s は 2×2 のマトリックスになります。このマトリックスの成分を $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ として操作結果を横ベクトルで表示すると、 $(\psi_+, \psi_-) s = (\alpha\psi_+ + \beta\psi_-, \gamma\psi_+ + \delta\psi_-)$ です。Pauli は次に $\alpha, \beta,$

γ, δ を決めて行きますが、その原理になるのは角運動量ベクトル成分のうち 1 個以上は自由に選べないという不確定性関係と、2 つの連続操作の差が $(s_x s_z - s_z s_x) = i s_y$ のような関係になることです。このような関係を全部使って Pauli は $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ を全部決定します。その論理と計算は見事です。その結果が次です。

$$(\psi_+, \psi_-) S_x = (\psi_+, \psi_-) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\psi_+, \psi_-) S_y = (\psi_+, \psi_-) \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\psi_+, \psi_-) S_z = (\psi_+, \psi_-) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ここでは表現を簡明にして 2 個の波動数と 3 個の操作との構造関係を頭に入れてもらうのが目的で、計算に直接応用するのが目的ではないので $(\hbar/2)$ を単位とする表示にしてあります。物理単位で表現すれば $s_x s_y s_z$ の各行列はこれに $(\hbar/2)$ を掛けたものになります。

Pauli の理論を扱うこの節では、今後特に断らない限り $(\hbar/2)$ を 1 とする表示を使います。そのほか本書では表示を簡略化しイメージが頭に入り易くするために使っている便法が 2 つあります。1 つ目は Planck の \hbar の代わりに $(\hbar/2\pi)$ を \hbar と表示している点です。2 つ目はベクトルを文章の中に自然に取り入れるために通常使われる縦ベクトルではなくて横ベクトルを使っています。そのため行列 S をベクトル V に操作した時の表現は SV ではなく VS になります。続けて行列操作する時にはこの方が合理的です。

.....

一見簡単に見えるこの3式がなぜスピンを論考する際の最重要式になるかと言うと、この関係式が Dirac に従って相対論的波動力学を建築し、結論を導く際の最初の最重要ステップになっているからです。この Pauli 論文は 1927 年、Dirac 論文は 1928 年ですから Pauli がこの論文を書いた時は、まだ Dirac 電子論を知らず、電子自転を当然のように考えて論文を書きましたが、論文の論理の中には電子の自転は一切入っておらず、それが Dirac 電子論に代わってもそのまま通用するものでした。それ以上に、この論文は Dirac 論文の第一走になるものでした。Dirac 論文を読んでそれに気付いた Pauli はそれを主張しましたが、Dirac はそれを認めず、Pauli 論文とは無関係に自分が考えたものだと言明して対立しました。何が真相かは不可知です。しかし Pauli 理論が Dirac 理論の第一歩に必要なことは確かです。存在確率を表すものとして一次元変数と思われていた波動関数に二次元を考える、物理運動を表すものと考えていたスピンを波動関数の演算子とする2点は、Pauli のような数学派でなければ考えにくいことです。しかしそれだけに Pauli 理論を抵抗なく受け入れ、理解できる人は物理学者・化学者の中でもごく少数の数学派以外にはいないと思います。そのためかどうかわかりませんが、化学者・物理学者がスピン理解のために Pauli 理論を理解するのに役立つような解説も書籍もほとんどありません。

4. スピン性とは何か

スピンは一体何であるかは、物理学的に正確なことは Pauli の理論と Dirac の理論の二つによってほぼ正確に解明されています。しかし

どうした訳か、その正しい認識がスピンの正しい知識を必要とする認識にならない状態が 100 年近くも続いています。これは驚くべきことのように聞こえますが実情です。プロが必死になって競争する理論物理学の実情です。そこでは「宇宙開關論」とか「ひも理論」とか現在競争の対象になっている課題については、驚くほどの関心と知力が集中しますが、猛烈な競争の結果、誰かが最終的な答を出してしまったら、それがどんなに大事な真理であろうと、途端に誰も関心を持たなくなり、「それはもう済んだ問題だ」です。全て済んだ問題かどうかで区分されます。しかしそれは学問をビジネスの対象とした見方です。学問の立場からすれば、問題の正しい認識が得られたら、それが基本的な認識ならそれを広める努力をするかどうかの問題なのであって、済んだかどうかの問題ではありません。私が『自由人物理』を著わし、さらに「スピンとは何か」を出すのもその認識からです。

そのため私はスピン論の 2 要素、Pauli 論と Dirac 論について解説しましたが、「スピンとは一体何か」を理解してもらうには何かが大きく欠けています。その原因はスピンの 3 方向成分 (S_x, S_y, S_z) と波動関数の 2 成分 (ψ_+, ψ_-) との関係を示した Pauli 式の意味がつかみがないことです。Pauli 理論は Dirac 理論の 1 年前ですから Pauli は理論を作る際、スピンとしては自転を考えたのでしょうが、自転による角運動量の 3 成分 (S_x, S_y, S_z) と演算子として導入された同じ 3 成分との関係がわからないということです。

これは物理モデルと演算子オペレータを波動力学の新しい形でつなぐ仕事なので、波動力学の Schrödinger 的な常識を壊し、新しいつな

がりを頭の中に作って行く必要があります。それにはまず、自由度、固有関数、固有値、交換関係といった基本概念を2重スピンという状況に対応して作り変えて行く必要があります。これは厳密な説明と展開を必要とするので、あとの数頁でできるものではありません。さらに説明を読んでも従来の知識から来る勝手な思い込みや間違いを正すには数ヵ月から数年かかるので、その間いつも座右に置いて教えるを受けられる教科書でなくてはなりません。

私自身困り果てて、スピンと量子力学に触れている沢山の教科書を読みました。この問題について真正面から答えてくれた教科書は2冊だけでした。Landauの『量子力学』第8章スピンと、梅沢博臣『大学演習量子力学』の第5章スピンです。

LandauはEinstein, Diracを先頭に10人の天才的物理学者を選べば必ず入る(と自分でも思っている)天才です。私が好きなのは、単に天才というのではなく、考えることがいつも独創的で、しかも自信に満ちていることです。物理学の全分野をチョーク1本で講義し、10冊の教科書を書きましたが、チョーク1本の講義とは統計力学にせよ流体力学にせよ、1つの体系について自分独自の基本原理に基づいて頭の中につまんでいる内容をメモ、参考書なしに論述して行き、必要な計算は全てその場で展開して行く講義です。物理全部についてこれが出来た人は、数多くいる天才の中でもFeynmanとLandauの2人だけだったと思います。人を楽しませる点ではFeynmanが上でしたが、自分の学問に自信があつて、間違っていることを黙ってられない点は少し違っていました。自分の先生だった半導体物理の始祖Ioffe(ヨッフエ)の概念の1つをまやかしと批判しただけでなくて、

数学の大物 Kolmogorof が建てて現在の乱流理論の中心概念になっている局所等方性乱流の概念を物理学的に間違いであると「流体力学」の主要項目にしている人です。理論的確信的な共産主義者でしたから、Stalin のやっていることが間違いと確信し、ビラを広く配りました。すぐ捕まって強制収容所に収監されました。1年後、ソ連最大の実験物理学者 Kapitza が命がけで Stalin に釈放を願い出ました。条件は水爆の開発に協力することでした。彼は天才的な方法を考えて、不可能と思われた計算を解釈し、お陰でソ連は米国に 4, 5 年遅れで水爆を開発出来ました。その功績で Stalin から賞をもらいました。その Kapitza に感謝するため彼が発見した超低温における He の超流動現象の理論を考えました。そしてこれに成功して Nobel 賞を受賞しました。その後は物理学教科書に専念しましたが、不思議に相対論の入らない範囲に限定しました。相対論が入る物理を Dirac の言葉を引用して自分の講義とすることは出来ず、自分の基本原理と計算でそれを行なうことを考えていたからだと思います。しかし、1982 年突然に自分の車を大型トラックと衝突させ、頭脳を粉々にして天才は終わり、完全なスピン論は書けずに終わりました。

しかし Pauli 理論はスピンの物理メカニズムとは無関係ですからそれでよいのです。彼はスピンを量子数 $1/2$ の電子の場合だけでなく、半奇数の核の場合に広げてその数学的性格をスピノルとして徹底議論した解説を書いています。

その彼の言葉のうち、最も印象に残るのは、「スピン性とは本質的には座標系の回転に関する波動関数の性質である」という一行です。注

意深く見ると、単に「スピン性」ではなく「波動関数のスピン性とは」ですが、実はこの一行が私を長い迷いから救い出してくれました。

5. 座標軸の回転と角運動量

2冊目は、梅沢博臣の『大学演習量子力学』です。梅沢はもともとは技術者になるつもりで名大電気工学科学生だったのですが、武谷三男の物理哲学を知って物理研究者を志し、勝手に理学部坂田敏教授のもとへ移って研究を始め、傑出した数物的才能でたちまち世界に認められる結果を挙げ、卒業10年後には他人を呼ばない東大が量子力学担当に招いたほどの人です。この時、東大で行なった講義の内容がこの本です。量子力学の第一頁が Hamilton-Jacobi で始まる本格的アプローチです。ちょうど同じ頃、応用化学学生に量子力学を教えていた私も、Powling Wilson に不満を感じ、この本に沿って講義を試みましたが、自分でも理解できない所だらけでした。特にスピンの所は全く分かりませんでした。

Umezawa のこの教科書は、波動力学におけるスピンの捉え方について簡潔ながら最も適確に展開叙述されていることに気付きます。第5章角運動量、磁気能率の内容は、I 軌道角運動、II 広義角運動量、III スピンの3部からなります。スピンに関する間違った常識や思い込みを改め、正しい捉え方をもちたいならこの3節30頁を繰り返し読んでいただくしかありません。その手助けに結論に当たるスピンの重要部だけを引用しておきます。

§ 10. 電子のスピン

電子は軌道角運動量 (nl) の外に固有の角運動量 (intrinsic angular momentum) を持つことが実験的に証明されている。これをスピン角運動量 (spin angular momentum) とよび、 $\hbar s$ と記す。これは $j=1/2$ という固有値をもつ角運動量である。従って $s^2 = s(s+1)$ としたときの量子数 s は $\frac{1}{2}$ で、交換関係は、

$$s \times s = is \quad (5.45)$$

である。§ 6~7 に述べた角運動量の一般論は $j \rightarrow s = \frac{1}{2}$ としてすべて s にあてはまる。

電子がスピンを持ち、従って空間座標以外に別の変数で指定される自由度を持つことは、スピンの磁気能率が伴うことに起因する水素型原子スペクトルの二重線、異常ゼーマン効果、Stern-Gerlach の実験などにより暗示され、Goudsmit, Uhlenbeck (1925) により電子スピン存在の仮定が提出され、Dirac の相対論的波動方程式よりその存在が理論的に導出された (1928)。ここで述べるのは Dirac 理論の非相対論的近似である。

§ 11. 電子スピンの固有値と固有函数

§ 6~7 の角運動量の一般論から、 s_x, s_y, s_z の固有値は $\pm \frac{1}{2}$ であることがわかる。 s^2, s_z の固有函数を $\chi_{\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}}(\xi)$ と書くことにしよう。ここで ξ はスピン自由度を代表する変数である。

s_x の固有値が二つの値 ($+1/2, -1/2$) をとるから、 ξ の取る独立な値は二つである。これを ± 1 とする。それらは次式により定義される。

$$\left. \begin{aligned} \chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1) &= 1, & \chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(-1) &= 0. \\ \chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1) &= 0, & \chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(-1) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (5.46)$$

一般のスピン函数を $\chi_{\frac{1}{2}}(\xi)$ と書く。

s^2 と s_z とを対角的にする表現では、行列

$$s_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

が交換関係 (5.45) を満足する。

6. 複素数波動関数を表現する新モデル

Landau によって「スピンとは本質的に座標系の回転に関する波動関する性質である」ことを悟り、Umezawa によって本来角運動量が存在する系で波動関数について座標の回転を考えて行くと Pauli 行列が導かれることを理解したと思います。その結果、スピンのある系の問題を正しく扱うには、波動関数としては Pauli 理論にあらわれる 2 つ一組の波動関数を使い、スピンの方向成分 S_x, S_y, S_z としては Pauli 行列を考える必要があります。

それを実際に行なう時に問題になるのは、Pauli 行列に現われる虚数 i です。オペレータ行列に i が現われることは、波動関数が複素数であることを意味します。これは Tomonaga が早くから強調していることです。波動関数が 1 次元の場合なら波動関数を適当に組み合わせることにより実数表現に出来ませんが、スピンの入るとそうはいきません。

そこで必要になるのは複素数の波動関数をそのまま表現する方法です。これが著者が考え本篇 321 頁に発表した「Pauli 理論がわかる新モデル」の目的です。全く抽象的だった Pauli 行列の意味がわかり、スピンの分方成分が座標の回転であることがよくわかるモデルです。

新モデルと称する 322 頁の図をもう一度提示します。理由はこの図に小さな誤りがあり、そのために 327 頁の上部② S_y の説明に混乱があるので正すためです。図の訂正は第 3 象限 (+ -) のグラフの説明を $i\psi_-$ から $-\psi_+$ に変更したことです。その理由は以下の通りです。新モデルでは原点を通過した波動関数は実数から虚数に変わり、戻って

増補附録

来, 関数は虚数から実数に戻りますが, そのやり方には二通りあります。初め i を掛けて虚数化 ($1/i$) を掛けて戻する方法と, 逆に初め ($1/i = -i$) を掛ける方法です。どちらを取るかは波動関数の回転の向きによります。ここを正せば新モデルは Pauli 理論と完全に一致します。

